7A. COMPARACIONES MÚLTIPLES DE PROPORCIONES.

Se realiza la comparación entre la variable exposición ordinal *ObesidadOr* (*Nivel de obesidad Imc normal*/*Sobrepeso*/*Obesidad*) y la variable respuesta *Hta* (*Hipertensión arterial Sí*/*No*). La distribución conjunta de frecuencias se muestra en la Tabla 7A.1. La frecuencia mínima esperada es 7,07 por lo que se puede emplear la prueba de chi-cuadrado cuyo resultado es p = 0,021.

Tabla 7A.1. Tabla de contingencia *Hta* − *ObesidadOr*.

			Hta Hipertensión arterial		Total
			No	Sí	
ObesidadOr (Nivel de obesidad)	Obesidad	n % Obesidad	10 23,3%	33 **76,7%**	43 100%
	Sobrepeso	n % Sobrepeso	26 51,0%	25 **49,0%**	51 100%
	Imc Normal	n % Imc Normal	8 44,4%	10 **55,6%**	18 100%
	Total	n % Total	44 39,3%	68 60,7%	112 100%

La comparación de las tres proporciones de hipertensión arterial en Imc Normal (55,6%), Sobrepeso (49,0%) y Obesidad (76,7%) es significativa (p = 0,021). La conclusión es que hay diferencias estadísticamente significativas en las tres proporciones. Es una conclusión demasiado genérica. Sería interesante desmenuzar más esta conclusión conociendo entre que pares de proporciones existe diferencia y entre cuales no. Esto se realiza con las **comparaciones múltiples** entre pares de proporciones para averiguar qué niveles de Imc difieren en la proporción de hipertensión arterial, es decir, cuáles son las categorías responsables de la significación. Ya que hay c = 3 niveles de obesidad, se pueden realizar un total de c(c−1)/2 comparaciones. En este caso 3(3−1)/2 = 3 comparaciones. A continuación se muestra la comparación de las proporciones de Hta en las categorías de Imc normal y Sobrepeso (Tabla 7A.2), en Imc normal y Obesidad (Tabla 7A.3) y en Sobrepeso y Obesidad (Tabla 7A.4).

Tabla 7A.2. Comparación de *Hta* en *Sobrepeso* − *Imc normal*.

			Hta Hipertensión arterial		Total
			No	Sí	
ObesidadOr (Nivel de obesidad)	Sobrepeso	n % Sobrepeso	26 51,0%	25 **49,0%**	51 100%
	Imc Normal	n % Imc Normal	8 44,4%	10 **55,6%**	18 100%
	Total	n % Total	34 49,3%	35 50,7%	69 100%

Tabla 7A.3. Comparación de *Hta* en *Obesidad* − *Imc normal*.

			Hta Hipertensión arterial		Total
			No	Sí	
ObesidadOr (Nivel de obesidad)	Obesidad	n % Obesidad	10 23,3%	33 **76,7%**	43 100%
	Imc Normal	n % Imc Normal	8 44,4%	10 **55,6%**	18 100%
	Total	n % Total	18 39,3%	43 60,7%	61 100%

Videotutorial 7A1Comparaciones.avi
Se muestra como se hace la comparación global entre la exposición binaria *ObesidadOr* y la respuesta binaria *Hta*, y como se hacen las comparaciones múltiples dos a dos entre las categorías de *ObesidadOr* (*Nivel de obesidad Imc normal/Sobrepeso/Obesidad*) y *Hta Sí/No*. Primero se seleccionan los casos de las dos categorías a comparar con el cuadro *Seleccionar casos* y después se obtiene las pruebas de chi-cuadrado con el cuadro *Tabla de contingencia*. Esto se repite tres veces, una para cada comparación. Los resultados son los mostrados en las Tablas 7A.1-5.

Tabla 7A.4. Comparación de *Hta* en *Obesidad* − *Sobrepeso*.					
			Hta Hipertensión arterial		Total
			No	Sí	
ObesidadOr (Nivel de obesidad)	Obesidad	n % Obesidad	10 23,3%	33 **76,7%**	43 100%
	Sobrepeso	n % Sobrepeso	26 51,0%	25 **49,0%**	51 100%
	Total	n % Total	36 38,3%	58 61,7%	94 100%

En todas estas comparaciones no hay ninguna casilla con frecuencia esperada menor de 5. En la Tabla 7A.5 se muestra la significación estadística por la prueba de chi-cuadrado de estas tres comparaciones múltiples. Asumiendo un riesgo α de 0,05 se concluye que la única comparación significativa es Sobrepeso – Obeso: la proporción de *Hta* de los obesos es mayor a la proporción de *Hta* de los casos con sobrepeso (p = 0,006).

Tabla 7A.5. Significación de comparaciones múltiples.

Comparación	**p de chi-cuadrado**
Imc Normal - Obeso	0,098
Imc Normal - Sobrepeso	0,633
Sobrepeso - Obeso	0,006

Pero esta conclusión no es del todo correcta, porque a medida que se incrementa el número de comparaciones aumenta el riesgo α de la hipótesis nula inicial. Es decir, el riesgo α global del conjunto de comparaciones es superior al fijado a priori. Si se fija un riesgo α de 0,05 para cada una de estas pruebas, la probabilidad de que una prueba tome la decisión correcta es 1 – 0,5 = 0,95. Si se efectúan tres pruebas, como en este caso, la probabilidad de obtener una decisión correcta se obtiene aplicando la ley multiplicativa de las probabilidades: $0{,}95 \times 0{,}95 \times 0{,}95 = 0{,}95^3 = 0{,}857$. La probabilidad de equivocarse en alguna de estas 3 pruebas, que equivale al riesgo α del total de las 3 comparaciones, es $\alpha_3 = 1 - 0{,}95^3 = 0{,}143$ (14.3%). Por tanto, el riesgo alfa global no es 0,05, sino 0,143 como puede verse en la Tabla 7A.6, en la que se muestra:

– En la primera columna el número de comparaciones k.

– En la segunda columna, el riesgo global α de varias comparaciones si cada una de ellas se realiza con un riesgo de 0,05. Observe que al efectuar 10 comparaciones (cada una con riesgo alfa de 0,05) el riesgo global alfa es de 0,401.

– En la tercera columna el riesgo α que debe tener cada comparación para que el conjunto de comparaciones de k pruebas tenga un riesgo α global de 0,05. Si se desea que el conjunto de 3 comparaciones tenga un riesgo α de 0,05, cada una de las comparaciones deberá realizarse con un riesgo alfa menor. Una aproximación válida cuando el riesgo global alfa es pequeño, es dividir el riesgo alfa de cada comparación por el número de comparaciones.

Tabla 7A.6. Riesgo alfa según el número de comparaciones múltiples.

Número de comparaciones	**Riesgo global α** (α = 0,05 de cada comparación)	**Riesgo α de cada comparación** (α = 0,05 global)
k	$\mathbf{1 - 0{,}95^k}$	$\mathbf{\alpha \approx 0{,}05/k}$
1	0,050	0,0500
2	0,098	0,0253
3	0,143	0,0170
4	0,185	0,0127
5	0,226	0,0102
6	0,265	0,0085
7	0,302	0,0073
8	0,337	0,0064
9	0,370	0,0057
10	0,401	0,0051

En resumen, aunque una de las 3 comparaciones resulta significativa, debido a que se han realizado varias comparaciones, es conveniente corregir el valor de p para asegurar que el conjunto de comparaciones tenga un riesgo alfa máximo del 5%. Para esta corrección se pueden utilizar varios procedimientos, siendo el de Bonferroni el de mayor interés didáctico y el de Holm el más adecuado para utilizar.

Procedimiento de Bonferroni

Cuando se quieren realizar 3 comparaciones con riesgo global α de 0,05, el procedimiento de Bonferroni consiste en reemplazar la p de cada comparación por el valor p x 3. Es un procedimiento excesivamente conservador.

En la Tabla 7A.7 se muestran las 3 comparaciones de nuestro ejemplo ordenadas por valor de p sin corregir de menor a mayor, junto con los valores de p corregidas por los procedimientos de Bonferroni y de Holm. Los valores de p corregidos por Bonferroni se obtienen a partir de $P_{BONFERRONI}$ = P x k. En este caso k=3:

- Sobrepeso - Obeso: $P_{BONFERRONI}$ = 0,006 x 3 = 0,018
- Imc Normal - Obeso: $P_{BONFERRONI}$ = 0,098 x 3 = 0,294
- Imc Normal - Sobrepeso: $P_{BONFERRONI}$ = 0,633 x 3 = 1,899 (1,000 que es la probabilidad máxima)

Si la corrección da como resultado un valor superior a la unidad, como sucede en Imc Normal - Sobrepeso, se le asigna valor de p=1 que es el valor máximao de una probabilidad. Se observa que una vez aplicada la corrección de Bonferroni la única comparación que sin corrección era significativa, sigue siéndolo: la prueba de chi-cuadrado de la comparación Imc Normal - Sobrepeso ofrece una p = 0,006 no corregida significativa, que pasa a p = 0,018 corregida por el procedimiento de Bonferroni, también significativa.

Tabla 7A.7. Corrección del riesgo alfa de Bonferroni y de Holm.

Comparación	***p* de chi-cuadrado**	***p* Bonferroni**	**p Holm**
Sobrepeso - Obeso	0,006	0,018	0,018
Imc Normal - Obeso	0,098	0,294	0,196
Imc Normal - Sobrepeso	0,633	1,000	0,633

Procedimiento de Holm

Es una mejora del procedimiento de Bonferroni para aumentar la potencia del conjunto de comparaciones y hacerle menos conservador. Consiste en ordenar de menor a mayor los valores p obtenidos en las comparaciones múltiples y aplicar Bonferroni paso a paso. En este ejemplo, si se acepta un riesgo α de 0,05 para el conjunto de las 3 pruebas:

- La prueba con menor valor de p, en este caso Sobrepeso - Obeso, con *p* no corregida de 0,006 tendrá un valor de *p* corregido de 0,006***3** = 0,018. Al corregirse por Holm aumenta pero sigue siendo significativa.
- Al ser significativa la p corregida de la comparación anterior, la siguiente comparación corrige su significación multiplicando la p por 2 (puesto que quedan 2 de 3 comparaciones). Sería 0,098*2=0,196. Obviamente tampoco es significativa.
- Se continuaría así sucesivamente hasta la primera prueba estadísticamente no significativa.

Los valores p corregidos por el procedimiento de Holmes de la Tabla 7A.7 se han obtenido de la siguiente manera:

- Sobrepeso - Obeso: P_{HOLM} = 0,006 x 3 = 0,018
- Imc Normal - Obeso: P_{HOLM} = 0,098 x 2 = 0,196
- Imc Normal - Sobrepeso: P_{HOLM} = 0,633 x 1 = 0,633

Si con la corrección se obtuviera un valor más pequeño que el anterior se le asigna el valor de p de la comparación anterior: aquí no sucede, pero si la tercera comparación hubiere dado una p menor que la de la 2ª comparación (0,196), a la 3ª comparación se le asignaría este mismo valor de p, es decir 0,196.

Tener en cuenta que aunque el total de comparaciones posibles en el ejemplo es 3, si, por conocimientos científicos, sólo tuviera interés realizar 2 comparaciones (por ejemplo las referidas a la categoría de referencia Imc normal) el valor k para realizar las correcciones sería 2 y no 3.